Physicité — IPhO : Relativité Restreinte (corrections)

1 Généralités

Exercice 1 : Le Flash

1. Supposons que le Flash va à une vitesse v et notons γ le facteur de Lorentz associé. Une durée mesurée dans le référentiel fixe Δt sera perçue comme $\gamma\Delta t$ par le Flash. De son point de vue, le temps est effectivement ralenti d'un facteur γ. On cherche donc la vitesse v_2 telle que $\gamma = 2$. On a
$$2 = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}$$
Donc
$$4\left(1-\frac{v_2^2}{c^2}\right) = 1$$
Puis
$$\frac{v_2^2}{c^2} = \frac{3}{4}$$
Et donc
$$v_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$
En prenant $c \simeq 3\times 10^8$ m.s^{-1}, on obtient que le Flash court à une vitesse $2,6\times 10^8$ m.s^{-1}
2. La police nous apprend que la distance entre le repère et la ville est de 8 km si mesurée dans un repère fixe. Or si le Flash court à une vitesse v et avec γ le facteur de Lorentz associé, les distances fixes qu'il perçoit sont réduites d'un facteur $1/\gamma$. Si il a mesuré une distance de 5 km entre la ville et le repère, c'est donc que
$$\frac{5}{8} = \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$
Ainsi, on a
$$\frac{v^2}{c^2} = 1-\frac{25}{64} = \frac{39}{64}$$
Donc
$$v = \frac{\sqrt{39}}{8}c$$
Avec la calculatrice, on trouve que le Flash courait à une vitesse de $2,3\times 10^8$ m.s^{-1}.

Exercice 2 : L'élixir de jeunesse

1. Lorsque l'on voyage beaucoup, on est souvent en mouvement par rapport au référentiel fixe. Mais lorsque l'on bouge puis que l'on retourne au référentiel fixe, moins de temps se sera écoulé pour nous que pour ceux restés dans le référentiel fixe. Ce faisant, nous ralentissons donc effectivement notre vieillissement.

2. Si une personne voyage à une vitesse v pendant une durée Δt mesurée dans le référentiel fixe, alors la personne aura vécu un voyage d'une durée $\frac{1}{\gamma}\Delta t$ avec γ le facteur de Lorentz associé à v. À basse vitesse, pour v très petit devant c, on a

$$\frac{1}{\gamma} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

Si un pilote de ligne passe une durée Δt à piloter des avions au cours de sa carrière, il aura perçu cette durée comme

$$\Delta t \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Et aura donc effectivement ralenti son vieillissement d'un temps

$$\Delta t_{\text{gagné}} = \frac{v^2 \Delta t}{c^2}$$

Pour une vitesse v et une durée Δt données par

$$v = 900 \text{ km.h}^{-1} = 250 \text{ m.s}^{-1} \quad \text{et} \quad \Delta t = 30 \times 200 \times 5 \text{ h} = 30 \times 10^3 \text{ h} = 108 \times 10^6 \text{ s}$$

avec $c \simeq 3 \times 10^8$ m.s^{-1}, on calcule que le pilote de ligne a ralenti son vieillissement de

$$\Delta t_{\text{gagné}} = 7,5 \times 10^{-5} \text{ s} = 75 \ \mu\text{s}$$

3. On réutilise la même formule $\Delta t_{\text{gagné}} = v^2 c^{-2} \Delta t$. Cette fois-ci on a pour vitesse et durée

$$v = 30 \text{ km.h}^{-1} = 8,3 \text{ m.s}^{-1} \quad \text{et} \quad \Delta t = 5 \times 200 \times 1 \text{ h} = 10^3 \text{ h} = 3,6 \times 10^6 \text{ s}$$

Donc l'étudiant ralenti son vieillissement de

$$\Delta t_{\text{gagné}} = 2,8 \times 10^{-9} \text{ s} = 2,8 \text{ ns}$$

En comparaison, la lumière peut se déplacer d'environ un mètre pendant ce laps de temps.

Exercice 3 : Muons dans l'atmosphère

1. Le temps mis à parcourir une distance h à vitesse v est $t = \frac{h}{v}$. Ici, $h = 10^4$ m et la vitesse $v = c \approx 3 \times 10^8$ m.s^{-1}. Donc le temps pris par la lumière pour atteindre le sol depuis une hauteur de 15 km est d'environ 3×10^{-5} s. C'est plus de dix fois le temps de vie moyen d'un muon. Sachant qu'un muon va nécessairement plus lentement que la lumière, on s'attendrait en physique non-relativiste à ce qu'il soit presque impossible pour un muon d'atteindre le sol.
2. La relativité restreinte dit que lorsqu'un objet va vite, les longueurs de son point de vue se contractent. À grande vitesse, un muon voit sa distance au sol réduire, et peut donc l'atteindre à temps. De notre point de vue, le temps propre du muon ralentit, et cela rallonge son temps de vie.
3. En supposant qu'il va à une vitesse v, il prend dans notre référentiel un temps $t = \frac{h}{v}$ à atteindre le sol. Or on sait que le muon perçoit nos durées comme dilatées d'un facteur γ, le facteur de Lorentz.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

De son point de vue, il prend donc un temps

$$\Delta t_{\text{muon}} = \frac{h}{\gamma v}$$

4. (a) Notons v sa vitesse, avec γ le facteur de Lorentz associé. Si il se désintègre après avoir vécu un temps τ_0, il faut que

$$\tau_0 \geq \frac{h}{\gamma v}$$

Soit en passant au carré

$$\tau_0^2 v^2 \geq h^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

En développant et regroupant, on a

$$v^2 \geq \frac{h^2}{\tau_0^2 + \frac{h^2}{c^2}}$$

Sachant que la vitesse doit être positive, on peut prendre la racine de chaque côté

$$v \geq \frac{h}{\sqrt{\tau_0^2 + \frac{h^2}{c^2}}}$$

Comme on a le temps propre avec 4 chiffres significatifs, on prend $c = 2,998$ m.s^{-1}. C'est nécessaire pour ne pas avoir $v_{\text{min}} = c$. En rentrant les valeurs dans la formule, on obtient comme vitesse minimale

$$v_{\text{min}} = 2,995 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

Le facteur de Lorentz associé est

$$\gamma_{\text{min}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{min}}^2}{c^2}}} = 17,33$$

Sachant que l'énergie en mouvement est donnée par γ fois l'énergie au repos, on a donc

$$E_{\text{min}} = \gamma_{\text{min}} m_\mu c^2 = 1,83 \text{ GeV}$$

(b) En notant E_0 l'énergie du muon au repos et γ son facteur de Lorentz par rapport à nous, on voit que

$$\gamma = \frac{E}{E_0}$$

Avec

$$\frac{E^2}{E_0^2} = \gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

On a

$$\frac{E^2}{E_0^2} - 1 = \frac{E^2 v^2}{E_0^2 c^2}$$

Donc

$$v^2 = \frac{c^2}{E^2}\left(E^2 - E_0^2\right)$$

Encore une fois, on peut passer à la racine puis utiliser la formule de la question (3), pour voir que le muon atteint le sol après avoir vécu une durée

$$\Delta t = \frac{h}{\gamma v} = \frac{hE_0}{c\sqrt{E^2 - E_0^2}}$$

La probabilité que le muon atteigne le sol est donc de

$$P = e^{-\frac{hE_0}{\tau_0 c\sqrt{E^2-E_0^2}}}$$

En rentrant les valeurs explicites, on obtient une probabilité de

$$P = 44,8\%$$

Exercice 4 : Hulk

1. On note $\vec{e}_x$ la direction du mouvement de la voiture, et $\vec{e}_y$ la direction du ciel. On peut décomposer la longueur L de la voiture en deux parties : la longueur L_x selon $\vec{e}_x$ et la longueur L_y selon $\vec{e}_y$. On a

$$L_x = L\cos(\theta) \quad \text{et} \quad L_y = L\sin(\theta)$$

Et par le théorème de Pythagore,

$$L_x^2 + L_y^2 = L^2$$

Maintenant, on sait que la voiture bouge dans le sens de $\vec{e}_x$ à une vitesse $v = 2\times 10^8$ m.s^{-1}, et ne bouge pas du tout dans le sens de $\vec{e}_y$. Donc dans le référentiel fixe, L_y ne change pas mais L_x se contracte d'un facteur $1/\gamma$. Du point de vue du méchant qui ne bouge pas, la longueur de la voiture est donc par le théorème de Pythagore

$$L' = \sqrt{\frac{1}{\gamma^2}L_x^2 + L_y^2} = \sqrt{(1-\beta^2)L^2\cos(\theta)^2 + L^2\sin(\theta)^2}$$

Mais $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$ et donc

$$L' = L\sqrt{1 - \beta^2\cos(\theta)^2}$$

Dans notre cas, $L = 4$ m, $\theta = \pi/4$ et $\beta = v/c = 2/3$. On calcule la longueur de la voiture que le méchant se prend

$$L' = 3,5 \text{ m}$$

2. On a déjà vu que L_x devient $\frac{1}{\gamma}L_x$ à cause de la vitesse, tandis que L_y reste fixe. On peut donc calcule le nouvel angle à l'aide de la fonction arc tangente

$$\theta' = \text{arctan}\left(\frac{L_y}{\frac{1}{\gamma}L_x}\right) = \text{arctan}\left(\gamma\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right) = \text{arctan}\left(\gamma\tan(\theta)\right)$$

Avec la calculatrice, on obtient

$$\theta' = 0,93 \text{ radians} = 53 \text{ degrés}$$

2 L'Espace de Minkowski

Exercice 5 : Modéliser un trou noir

1. Un objet avance dans son futur, il ne peut pas aller dans son ailleurs ou dans son passé. Or le futur d'un objet dans le futur, est dans le futur. Autrement dit, si un objet est dans le futur, il ne peut que continuer à être dans le futur. Le même raisonnement est valable avec les cônes de lumière, ce qui fait que de la lumière qui commence dans le futur ne peut que rester dans le futur.
2. La trajectoire d'un objet avance nécessairement dans le temps et finit à un temps infini, alors que le passé finit à un temps $t = 0$. Donc tout objet est obligé de sortir du passé à un moment ou un autre. Le même argument est valable pour la lumière.
3. (a) En suivant une trajectoire au repos dans le référentiel que nous utilisons, un objet finira toujours dans le futur
   (b) Le futur d'un objet dans notre ailleurs est dans notre futur ou notre ailleurs, pas notre passé. Comme un objet ne peut aller que dans son futur, il ne peut pas aller dans le passé.
   (c) Si il est au repos, il suit une trajectoire rectiligne dans le référentiel que nous utilisons. Il va à une vitesse fixe $v < c$. Or comme le futur grandit à une vitesse $c > v$, l'objet finira forcément dans le futur.
   (d) En général, l'objet peut accélérer constamment. Une accélération constante ne permet pas de dépasser la vitesse de la lumière mais permet de s'en approcher infiniment. Ainsi, un objet finira toujours par se rapprocher infiniment proche du cône de lumière futur. Mais avec une accélération constante il est possible de ne jamais le traverser et de toujours rester dans l'ailleurs.
4. (a) En utilisant les mêmes arguments que précédemment, on voit que la lumière peut facilement entrer dans le futur mais ne peut jamais entrer dans le passé.
   (b) La lumière va à la même vitesse que l'expansion du cône futur, c. Donc si la lumière se dirige dans une direction opposé au futur, elle peut se maintenir dans l'espace à une distance du futur constante à travers le temps. Par contre, elle ne peut pas s'en éloigner. À chaque fois que la lumière se rapproche du futur en allant un peu dans sa direction, elle s'en rapproche de manière irréversible.

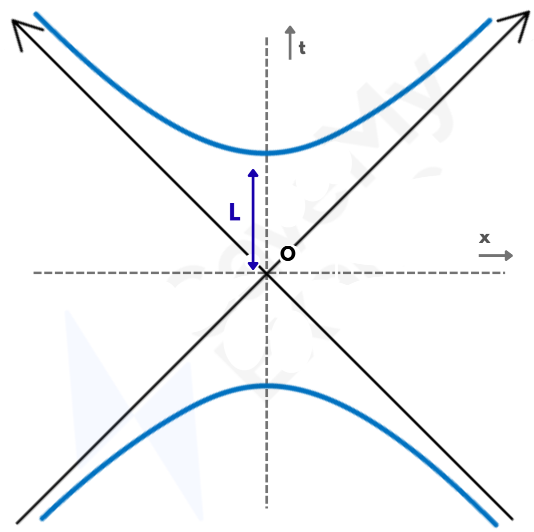
Le futur et l'ailleurs proches du cône de lumière futur modélisent très bien la zone proche de la surface d'un trou noir, que ce soit l'intérieur du trou noir proche de la surface dans le cas du futur, ou l'extérieur du trou noir proche de la surface dans le cas de l'ailleurs. Il en va de même pour le passé qui modélise la surface d'un trou blanc.

Exercice 6 : Coincer la lumière

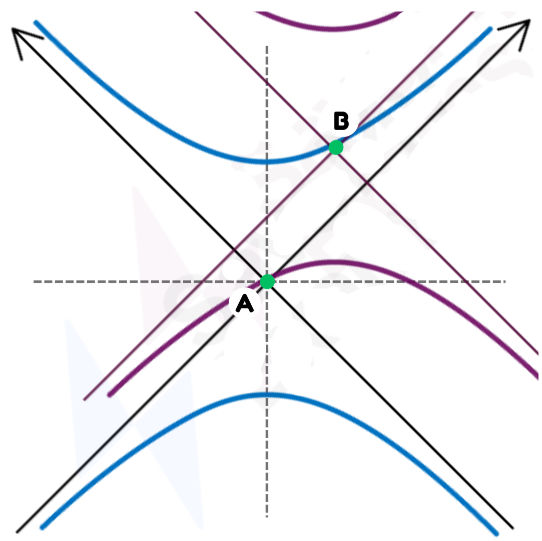
Un objet sans masse se déplace nécessairement à la vitesse de la lumière, c. En particulier, un tel objet ne peut pas ralentir. Or avec une seule dimension spatiale, il faut nécessairement ralentir pour faire demi-tour. L'objet ne peut donc que soit aller à droite pour toute sa vie, soit aller à gauche pour toute sa vie. Formellement, deux trajectoires sont possibles. Avec $t(s) = s$ et en supposant que la trajectoire passe par l'origine, soit $x(s) = cs$ soit $x(s) = -cs$. Une théorie d'objets sans masses est donc la somme de deux théories découplées : celle constituée des objets allant à droite, et celle constituée des objets allant à gauche.

Exercice 7 : Géométrie dans l'espace de Minkowski

1. On fixe L. En 2 dimensions, le cercle de rayon L est l'ensemble des points aux coordonnées (t, x) tel que la distance entre (x, y) et $(0, 0)$ soit L. Mais cette distance est l'intervalle de Lorentz,
$$\Delta s^2 = c^2(t-0)^2 - (x-0)^2 = t^2 - x^2$$
On cherche donc les points (t, x) tel que
$$L^2 = c^2t^2 - x^2$$
C'est l'équation d'une hyperbole de centre 0, ayant pour asymptotiques les cônes lumières, et de sommets $(L, 0)$ et $(-L, 0)$. Le "cercle" est dessiné en bleu ci-dessous.



2. Soit un triangle équilatéral ABC dans l'espace de Minkowski. Comme la géométrie de l'espace est invariante sous translation, on peut bouger le triangle équilatéral dans l'espace et il sera toujours équilatéral. En particulier, on peut supposer que A est l'origine sans perte de généralité. On note aussi la longueur de ses côtés $L > 0$. Alors B et C sont sur le cercle de longueur L passant par l'origine que l'on a tracé auparavant. Traçons un deuxième cercle de longueur L de centre B, comme représenté ci-contre.



Alors C est alors un point où les deux cercles se croisent. Mais les cercles ne se croisent jamais. Un cercle de centre X est inclut dans le passé et le futur de X, et ne passe jamais par son ailleurs. Or la partie future du cercle de centre A est dans l'ailleurs de B, et ne croise donc jamais le cercle de centre B. De même, la partie passée du cercle de centre A est dans le passé de B et ne peut donc croiser que la partie passé du cercle de centre B, mais cette partie est dans l'ailleurs de A. Ainsi, il n'existe pas de triangle équilatéral dans l'espace de Minkowski en 2 dimensions.

3 Trajectoires et Mouvement

Exercice 8 : Trajectoires non-galiléennes

1. Si l'on effectue une rotation de π radians ou 180 degrés autours de l'axe des y ou l'axe des z, x devient $-x$ et vice versa. La trajectoire bleue devient la trajectoire verte, et vice versa. En considérant notre référentiel comme galiléen, les lois de la physique ne changent pas sous une rotation et donc nos deux amis vivent la même chose. En particulier, il vieillissent tous deux exactement pareil.
2. Comme nos deux amis vivent exactement la même chose, on ne s'intéresse qu'à notre ami vert sans perte de généralité.
   (a) La trajectoire de notre ami vert est donnée par
   $$x(t) = v_0 t - \frac{a}{2}t^2$$
   À $t_0 = 0$, $x(t_0) = 0$: il part du vaisseau. L'instant t_f où il revient est le deuxième instant tel que $x(t_f) = 0$, après le départ. On cherche donc t_f tel que
   $$v_0 t_f - \frac{a}{2}t_f^2 = 0$$
   Soit
   $$t_f(v_0 - \frac{a}{2}t_f) = 0$$
   De notre point de vue, la durée prise par nos deux amis pour revenir est
   $$\Delta t = t_f - t_0 = t_f = \frac{2v_0}{a}$$
   (b) Du point de vue de notre ami vert, le temps s'écoule plus vite d'un facteur $\frac{1}{\gamma}$, avec γ le facteur de Lorentz associé à sa vitesse. Comme sa vitesse change tout le temps, γ change aussi. Étant donné un instant t entre t_0 et t_f, sa vitesse est donnée par
   $$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = v_0 - at$$
   Donc le facteur γ à cet instant vaut $\gamma_t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(v_0-at)^2}{c^2}}}$ Ainsi, en intégrant sur tous les instants de la trajectoire, on voit que nos amis ressentent passer un temps
   $$\Delta t' = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{\gamma}\mathrm{d}t = \frac{1}{c}\int_{t_0}^{t_f} \sqrt{c^2 - (v_0 - at)^2}\ \mathrm{d}t \tag{1}$$
   Pour une petite vitesse, on retrouve approximativement $\Delta t' = t_f - t_0$. Cependant,
   $$\sqrt{c^2 - (v_0 - at)^2} \leq c$$
   et donc on voit bien que $\Delta t' \leq \Delta t$.

3. Les deux amis vont du point $(t_0, 0, 0, 0)$ au point $(t_f, 0, 0, 0)$ de l'espace-temps, dans notre référentiel. Or on sait qu'il existe une seule trajectoire qui prend un maximum de temps pour aller d'un point à l'autre : la trajectoire galiléenne, représentée par une ligne droite dans n'importe quel référentiel galiléen. En se plaçant dans le référentiel de notre ami bleu, qui est un référentiel galiléen, on voit bien que lui-même se déplace en ligne droite tandis que notre ami vert suit une trajectoire courbe. Ainsi, notre ami bleu perçoit plus de temps s'écouler avant de rentrer sur le vaisseau, et a plus vieillit que notre ami vert.

Exercice 9 : Des horloges qui voyagent

Il faut ici prendre en compte le fait que la Terre est ronde, et qu'elle tourne sur elle-même. Le soleil se lève à l'est et se couche à l'ouest, donc la Terre tourne sur-elle même vers l'est. Se déplacer vers l'ouest revient donc à aller à contre-sens de la Terre et à moins nous déplacer par rapport au soleil, que l'on peut considérer comme un référentiel fixe galiléen, alors que se déplacer vers l'est revient à se rajouter encore plus de vitesse par rapport au déplacement de la Terre. Si l'on se place dans le référentiel du soleil et qu'on regarde les trajectoires dans l'espace-temps, ce sont les horloges qui sont parties vers l'ouest qui ont la trajectoire la plus proche d'une ligne droite, puis les horloges restées sur place, puis celles parties vers l'est. Autrement dit, ce sont les horloges parties vers l'ouest qui ont vu le plus de temps s'écouler, puis les horloges restées sur place, puis les horloges parties vers l'est. Cela explique que les horloges parties vers l'est ont accumulé du retard, alors que celles parties vers l'ouest ont accumulé de l'avance.

Exercice 10 : Superman

Il nous faut ici composer la vitesse v_s de Superman avec la vitesse v_l de sa lance. Or la formule de composition des vitesses nous dit que la vitesse composée v' est donnée par

$$v' = \frac{v_s + v_l}{1 + \frac{v_s v_l}{c^2}}$$

Avec $v_s = v_l = c/2$, on voit que la lance fonce sur l'ennemi de Superman à une vitesse

$$v' = \frac{c}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}c = 2,4 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

Exercice 11 : Compétition alien

On note $\vec{e}_x$ la direction d'un des vaisseaux extraterrestres que l'on va nommer X, $\vec{e}_y$ la direction de l'autre vaisseau que l'on va nommer Y, et v leur vitesse vues du référentiel terrestre. On cherche à trouver la vélocité $\vec{v}_v$ de Y vue dans le référentiel propre de X, sans perte de généralité. On peut décomposer cette vélocité en deux, entre la partie $v_{v,x}$ qui va dans la direction $\vec{e}_x$ et la partie $v_{v,y}$ qui va dans la direction $\vec{e}_y$. Sous le boost permettant d'aller du référentiel de la Terre au référentiel de X, on sait que le temps se fait dilater par un facteur γ, tout comme les distances selon $\vec{e}_x$, tandis que les distances selon $\vec{e}_y$ ne changent pas. Pour les vitesses qui sont des unités de distance divisées par des unités de temps, cela veut dire qu'une vitesse selon $\vec{e}_x$ ne changent pas alors qu'une vitesse selon $\vec{e}_y$ se fait transformer par un facteur $\frac{1}{\gamma}$.

Dans le référentiel de X, deux choses contribuent au mouvement de Y : le mouvement de Y vers la Terre et le mouvement général de la Terre et de Y vers X. Le mouvement de Y vers la Terre se fait dans la direction $\vec{e}_y$ et est donc réduit d'un facteur $1/\gamma$ lorsque l'on passe dans le référentiel de X. D'un autre côté, le mouvement de la Terre et de Y se fait dans la direction $\vec{e}_x$ et ne change pas avec le changement de référentiel. On a donc $v_{v,y} = \frac{1}{\gamma}v$, tandis que $v_{v,x} = v$. Par le théorème de Pythagore, on trouve la vitesse totale

$$v_v = \sqrt{v_{v,x}^2 + v_{v,y}^2} = \sqrt{v^2 + \frac{1}{\gamma}v^2} = v\sqrt{2 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Pour un petit v, on obtiendrait bien $v' = \sqrt{2}\ v$ comme attendu. Avec $v = 0.9c$, on obtient

$$v_v = 1,04\ v = 0.940\ c = 2,82 \times 10^8\ m.s^{-1}$$

Il est bien entendu aussi possible de retrouver ce résultat de manière plus propre mais plus calculatoire, en passant par les formules de transformation de quadrivecteur.

Exercice 12 : Accélération dans une accélération

1. Nous pouvons fixer un paramètre s qui suit le temps dans le référentiel du train, $t_t(s) = s$. L'indice t est là pour indiquer que c'est le temps du train. L'accélération de la voiture télécommandée étant constante, on la note a_t par abus de langage de sorte à avoir $a_t(s) = a_t$. Puis en intégrant selon $t = s$, on a $v_t(s) = a_t s$ et $x_t(s) = a_t s^2/2$.
2. Comme tout le problème va selon une seule direction spatiale, nous ne considérerons que les deux premières composantes des quadrivecteurs, les deux dernières étant égales à 0. En notant X_t^i le quadrivecteur position et en injectant directement la trajectoire calculée à la question d'avant, on a

$$X_t^0(s) = cs$$
$$X_t^1(s) = a_t s^2/2$$

Le quadrivecteur vitesse U_t^i est donné par $(\gamma c, \gamma v)$. En notant le facteur de Lorentz associé au mouvement de la voiture dans le référentiel du train

$$\gamma_t(s) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v(s)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a_t^2 s^2}{c^2}}}$$

On a

$$U_t^0(s) = \gamma_t(s)c$$
$$U_t^1(s) = \gamma_t(s)a_t s$$

Enfin, en notant A_t^i le quadrivecteur accélération et F_t^i le quadrivecteur force, la première loi de Newton nous dit que

$$F_t^i = mA_t^i \tag{2}$$

Or on sait que $F_t^i = (\gamma_t P_t/c, \gamma_t F_t)$, où $P_t = m\gamma^3 a_t v_t$ et $F_t = m\gamma_t^3 a$. En mettant tout ensemble, on obtient

$$A_t^0(s) = \gamma_t(s)^4 a_t^2 s/c$$
$$A_t^1(s) = \gamma_t(s)^4 a_t$$

3. Le train est en train de partir avec une vitesse $v_{\text{train}}(s) = a_{\text{train}} s$, donc on peut noter les facteurs associés au mouvement relatif entre le quai et le train

$$\beta_{t-q}(s) = \frac{v_{\text{train}}(s)}{c} = \frac{a_{\text{train}} s}{c} \qquad \text{et} \qquad \gamma_{t-q}(s) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_{t-q}(s)^2}}$$

On note X_q^i, U_q^i et A_q^i les quadrivecteurs précédents dans le référentiel du quai. À l'instant s, pour passer du référentiel du train à celui du quai, il nous faut faire un boost de vitesse $-a_{\text{train}} s$. On obtient

$$\begin{aligned}
X_q^0(s) &= \gamma_{t-q}(s)[X_t^0(s) + \beta_{t-q}(s) X_t^1(s)] \\
X_q^1(s) &= \gamma_{t-q}(s)[X_t^1(s) + \beta_{t-q}(s) X_t^0(s)] \\
U_q^0(s) &= \gamma_{t-q}(s)[U_t^0(s) + \beta_{t-q}(s) U_t^1(s)] \\
U_q^1(s) &= \gamma_{t-q}(s)[U_t^1(s) + \beta_{t-q}(s) U_t^0(s)] \\
A_q^0(s) &= \gamma_{t-q}(s)[A_t^0(s) + \beta_{t-q}(s) A_t^1(s)] \\
A_q^1(s) &= \gamma_{t-q}(s)[A_t^1(s) + \beta_{t-q}(s) A_t^0(s)]
\end{aligned}$$

Explicitement,

$$\begin{aligned}
X_q^0(s) &= \gamma_{t-q}(s)[cs + \beta_{t-q}(s) a_t s^2/2] = \gamma_{t-q}(s)[cs + a_{\text{train}} a_t s^3 c^{-1}/2] \\
X_q^1(s) &= \gamma_{t-q}(s)[a_t s^2/2 + \beta_{t-q}(s) cs] = \gamma_{t-q}(s)[a_t s^2/2 + a_{\text{train}} s^2] \\
U_q^0(s) &= \gamma_{t-q}(s)[\gamma_t(s) c + \beta_{t-q}(s)\gamma_t(s) a_t s] = \gamma_{t-q}(s)\gamma_t(s)[c + a_{\text{train}} a_t s^2 c^{-1}] \\
U_q^1(s) &= \gamma_{t-q}(s)[\gamma_t(s) a_t s + \beta_{t-q}(s)\gamma_t(s) c] = \gamma_{t-q}(s)\gamma_t(s)[a_t s + a_{\text{train}} s] \\
A_q^0(s) &= \gamma_{t-q}(s)[\gamma_t(s)^4 a_t^2 s/c + \beta_{t-q}(s)\gamma_t(s)^4 a_t] = \gamma_{t-q}(s)\gamma_t(s)^4[a_t^2 s/c + a_{\text{train}} a_t s c^{-1}] \\
A_q^1(s) &= \gamma_{t-q}(s)[\gamma_t(s)^4 a_t + \beta_{t-q}(s)\gamma_t(s)^4 a_t^2 s/c] = \gamma_{t-q}(s)\gamma_t(s)^4[a_t + a_{\text{train}} a_t^2 s^2 c^{-2}]
\end{aligned}$$

4. De manière générale, en notant $v_q(s)$ la vitesse et $a_q(s)$ l'accélération de la voiture dans le référentiel du quai, et en notant γ_q le facteur de Lorentz associé au mouvement de la voiture dans le référentiel du quai, nous avons

$$\begin{aligned}
U_q^0(s) &= \gamma_q(s) c \\
U_q^1(s) &= \gamma_q(s) v_q(s) \\
A_q^0(s) &= \gamma_q(s)^4 a_q(s) v_q(s)/c \\
A_q^1(s) &= \gamma_q(s)^4 a_q(s)
\end{aligned}$$

5. On cherche l'accélération de la voiture en fonction du temps dans le référentiel du quai $a_q(t_q)$. On peut déjà chercher $a_q(s)$, puis trouver $t_q(s)$, inverser la fonction pour avoir $s(t_q)$ et composer les deux fonctions. Pour avoir, nous pouvons égaler les deux manières d'obtenir $A_q^1(s)$. Mais l'expression générale de $A_q^1(s)$ dépend de $a_q(s)$ et de $\gamma_q(s)$ (qui dépend de $v_q(s)$). Donc nous devons commencer par trouver $\gamma_q(s)$. Pour ce faire, égalons les deux manières d'obtenir $U_q^0(s)$. Nous avons

$$\gamma_q(s) c = U_q^0(s) = \gamma_{t-q}(s)\gamma_t(s)[c + a_{\text{train}} a_t s^2 c^{-1}]$$

Donc

$$\gamma_q(s) = U_q^0(s) = \frac{1 + \frac{a_{\text{train}} a_t s^2}{c^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{a_{\text{train}}^2 s^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{a_t^2 s^2}{c^2}\right)}}$$

Puis

$$\gamma_q(s)^4 a_q(s) = A_q^1(s) = \gamma_{t-q}(s)\gamma_t(s)^4[a_t + a_{\text{train}} a_t^2 s^2 c^{-2}]$$

En développant les facteurs de Lorentz, l'équation donne

$$\frac{\left(1+\frac{a_{\text{train}} a_t s^2}{c^2}\right)^4}{\left(1-\frac{a_{\text{train}}^2 s^2}{c^2}\right)^2\left(1-\frac{a_t^2 s^2}{c^2}\right)^2} a_q(s) = \frac{1+\frac{a_{\text{train}} a_t s^2}{c^2}}{\left(1-\frac{a_t^2 s^2}{c^2}\right)^2\sqrt{1-\frac{a_{\text{train}}^2 s^2}{c^2}}} a_t$$

Les facteurs se simplifient, pour avoir enfin

$$a_q(s) = \left(\frac{\sqrt{1-\frac{a_{\text{train}}^2 s^2}{c^2}}}{1+\frac{a_{\text{train}} a_t s^2}{c^2}}\right)^3 a_t$$

Enfin, on peut trouver $s(t_q)$ en rappelant que $X_q^0(s) = ct_q(s)$ et en égalisant les deux manières de calculer $X_q^0(s)$. On obtient

$$ct_q(s) = X_q^0(s) = \gamma_{t-q}(s)[cs + \frac{a_{\text{train}} a_t s^3}{2c}]$$

Donc

$$t_q = \frac{s(t_q) + \frac{a_{\text{train}} a_t s(t_q)^3}{2c^2}}{\sqrt{1-\frac{a_{\text{train}}^2 s(t_q)^2}{c^2}}}$$

Puis en passant au carré

$$\left(1-\frac{a_{\text{train}}^2 s(t_q)^2}{c^2}\right) t_q^2 = \left(s(t_q) + \frac{a_{\text{train}} a_t s(t_q)^3}{2c^2}\right)^2$$

On obtient une équation polynomiale de degré 6 à résoudre pour obtenir $s(t_q)$. Cela veut dire qu'il y a 6 solutions possibles. Mais en rappelant qu'on doit avoir $s(0) = 0$ et que s grandit avec t_q, une seule solution reste. En l'insérant dans la formule précédente pour $a_q(s)$, on obtient $a_q(t_q)$. De cette manière, on peut trouver l'accélération que possède la voiture télécommandée en fonction du temps, de notre point de vue.

Exercice 13 : Couleur des galaxies

La formule pour l'effet Doppler relativiste nous dit que si nous nous éloignons de la galaxie à une vitesse v et qu'elle absorbe de la lumière à une fréquence f_0, nous observons une fréquence manquante

$$f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f_0$$

Dans notre cas, nous voyons $f = 550$ nm, tandis que les scientifiques nous disent que $f_0 = 450$ nm. On a $f_0 < f$, donc $\beta < 0$ et nous nous rapprochons en fait de la galaxie. Pour savoir à quelle vitesse nous nous rapprochons de la galaxie, développons la formule :

$$\frac{1-\beta}{1+\beta} = \frac{f^2}{f_0^2}$$

Donc en notant v la vitesse de la galaxie par rapport à nous, avec $\beta = -v/c$,

$$c + v = \frac{f^2}{f_0^2}(c - v)$$

Puis

$$v = \frac{f^2 - f_0^2}{f^2 + f_0^2}c$$

En rentrant les valeurs explicites, nous obtenons

$$v = 0.1c = 3 \times 10^7 \text{ m.s}^{-1}$$

4 Énergie

Exercice 14 : Dans la télévision

1. On suppose que les électrons sont au repos avant de traverser la tension, donc leur énergie cinétique vaut 0 au début. Puis en traversant la tension, ils gagnent une énergie cinétique de $E_c = 50$ keV. En mécanique classique, nous avons

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

   Donc les électrons atteignent en traversant la tension une vitesse

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}$$

   En sachant que l'énergie au repos est donnée par

$$E_e = mc^2$$

   Nous avons

$$\frac{v}{c} = \sqrt{2\frac{E_c}{E_e}}$$

   En rentrant les valeurs explicites, nous obtenons avec la mécanique classique une vitesse atteinte de

$$v = 0,442c = 1,32 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

2. En mécanique relativiste, l'expression de l'énergie cinétique devient

$$E_c = (\gamma - 1)mc^2 = (\gamma - 1)E_e$$

   Donc

$$\gamma = 1 + \frac{E_c}{E_e}$$

   Puis

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{E_e}{E_e + E_c}$$

   Donc

$$v = c\sqrt{1 - \frac{E_e^2}{(E_e + E_c)^2}}$$

Explicitement, on a

$$v = 0,413c = 1,24 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

On voit que avec les corrections apportées par la relativité restreinte, la vitesse obtenue est plus élevée de environ 6%.

3. La différence entre les vitesses obtenues est de $\Delta v = 8 \times 10^6$ m.s^{-1}. Si l'on suppose très largement que cette différence de vitesse existe dès la création de l'électron, alors la mécanique classique prédirait que l'électron arrive plus tôt qu'il n'arrive vraiment d'une durée $\Delta t = d/\Delta v$, avec $d = 50$ cm la distance que les électrons doivent traverser. On obtient

$$\Delta t = 6 \times 10^{-8} \text{ s} = 60 \text{ ns}$$

C'est une durée de temps minuscule, qu'on peut facilement ne pas prendre en compte. Les effets relativistes dans ce problème sont négligeables, il n'est pas utile de les prendre en compte.

Exercice 15 : Correction de l'énergie cinétique

L'énergie d'un objet allant à vitesse v est donnée par

$$E = \gamma mc^2$$

Avec $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ et $\beta = v/c$. Mais on peut décomposer cette énergie comme la somme de son énergie au repos et de son énergie cinétique, et son énergie au repos est donnée par $E_{\text{repos}} = mc^2$. Donc l'énergie cinétique d'un objet est donnée par

$$E_c = (\gamma - 1)mc^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)mc^2$$

Si l'objet va à une vitesse beaucoup plus petite que celle de la lumière, β et très petit et β^2 encore plus. En notant

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right)mc^2 \tag{3}$$

On a $E_c = f(\beta^2)$ et pour une petite vitesse on a donc

$$E_c \approx f(0) + \beta^2 f'(0) + \frac{1}{2}\beta^4 f''(0) + \dots \tag{4}$$

Il s'agit alors simplement de dériver f. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \left((1-x)^{-\frac{1}{2}} - 1\right)mc^2 \qquad &\text{et} \qquad & f(0) = 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}mc^2 \qquad &\text{et} \qquad & f'(0) = \frac{1}{2}mc^2 \\ f''(x) &= \frac{3}{4}(1-x)^{-\frac{5}{2}}mc^2 \qquad &\text{et} \qquad & f'(0) = \frac{3}{4}mc^2 \end{aligned}$$

En insérant dans l'expression pour E_c, on obtient comme premier terme 0, comme deuxième terme

$$\beta^2 f'(0) = \frac{v^2}{c^2}\frac{1}{2}mc^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

ce qui est la formule classique pour l'énergie cinétique, et comme troisième terme

$$\frac{1}{2}\beta^4 f''(0) = \frac{1}{2}\frac{v^4}{c^4}\frac{3}{4}mc^2 = \frac{3}{8}mv^4c^{-2}$$

ce qui est la première correction apportée par la relativité restreinte à la formule classique. La formule corrigée à l'ordre de v^4 est

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}mv^4c^{-2}$$

Exercice 16 : Annihilation de protons et antiprotons

1. (a) Le système considéré ne subit pas de forces extérieures et est fermé, donc le quadrivecteur énergie-impulsion total est conservé. Au début, on a deux un proton et un anti-proton au repos, chacun de quadrivecteur énergie-impulsion

$$P^i_{\text{proton}} = (m_p c, \vec{0})$$

Donc le quadrivecteur total vaut

$$P^i_{\text{total}} = (2m_p c, \vec{0})$$

En notant $\vec{p_1}$ et $\vec{p_2}$ l'impulsion de chaque photon émis, on a donc

$$\vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{0}$$

On en déduit qu'ils sont émis selon le même axe dans des sens opposés, $\vec{p_1} = \vec{p_2}$

(b) Comme les deux photons ont la même quantité de mouvement, on la note simplement p. En notant E_1 et E_2 l'énergie de chaque photon, on a pas conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total

$$E_1 + E_2 = 2m_p c^2$$

D'un autre côté, comme les photons n'ont pas de masse, la norme de leur quadrivecteur énergie-impulsion est nulle et on a

$$E_1^2 = p^2c^2 = E_2^2$$

On en déduit que les deux photons ont la même énergie E, et que

$$2E = 2m_p c^2$$

Puis

$$E = m_p c^2$$

Chaque photon a l'énergie au repos d'un proton.

(c) On sait que la longueur d'onde λ d'un photon est donnée par

$$E = \frac{hc}{\lambda} \qquad \text{donc} \qquad \lambda = \frac{h}{m_p c}$$

Avec $m_p c^2 = 938$ MeV et $h = 6,62 \times 10^{-34}$ J.s $= 4,14 \times 10^{-15}$ eV.s, on a donc

$$\lambda = 1,32 \times 10^{-12} \text{ m}$$

Sur le spectre électromagnétique, cette longueur d'onde correspond à l'émission d'un rayon gamma, comme attendu d'une annihilation de particules.

2. (a) Quitte à tourner, on suppose que le mouvement se fait selon l'axe x, ou en d'autre terme selon la première composante des quadrivecteurs. Le quadrivecteur énergie-impulsion du proton est

$$P_p^i = (m_p c,\ \vec{0}) \tag{5}$$

Tandis que celui de l'antiproton est

$$P_{\bar{p}}^i = (E_{\bar{p}}/c,\ \bar{p},\ 0,\ 0)$$

Avec $\bar{p}$ l'impulsion associée à $E_{\bar{p}}$,

$$\bar{p} = \frac{1}{c}\sqrt{E_{\bar{p}}^2 - m_p^2 c^4}$$

Le quadrivecteur total est

$$P_{\text{total}}^i = (m_p c + E_{\text{p}} c^{-1},\ \bar{p},\ 0,\ 0)$$

Et la masse totale invariante du système est donnée par

$$m_{\text{inv}}^2 c^2 = |P_{\text{total}}^i|^2 = (m_p c + E_{\bar{p}} c^{-1})^2 - \bar{p}^2 = m_p^2 c^2 + E_{\bar{p}}^2 c^{-2} + 2E_{\bar{p}} m_p - E_{\bar{p}}^2 c^{-2} - m_p^2 c^2$$

Soit

$$m_{\text{inv}} = \frac{1}{c}\sqrt{2E_{\bar{p}} m_p}$$

(b) Le centre de masse d'un système est la moyenne des positions des objets du système, pondérés par leurs masse effective[1] γm

$$\vec{x}_{\text{CM}} = \frac{\sum_i \gamma_i m_i \vec{x}_i}{\sum_i \gamma_i m_i} = \frac{1}{E_{\text{tot}}}\sum_i \gamma_i m_i \vec{x}_i$$

Donc le référentiel du centre de masse d'un système est le référentiel tel que $\vec{x}_{\text{CM}}$ ne dépend pas du temps,

$$\vec{0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x}_{\text{CM}} = \frac{1}{E_{\text{tot}}}\sum_i \gamma_i m_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x}_i = \frac{1}{E_{\text{tot}}}\sum_i \vec{p}_i$$

Autrement dit, le référentiel du centre de masse est définit comme le référentiel dans lequel l'impulsion totale est nulle. Mais dans un système fermé, le quadrivecteur énergie-impulsion est constant, et passer d'un référentiel galiléen au référentiel du centre de masse ne demande qu'un boost de vitesse constante pour annuler l'impulsion totale constante, et une translation pour placer le centre de masse à l'origine. C'est donc aussi un référentiel galiléen. Notre expérience étant un système fermé, son référentiel du centre de masse est bien galiléen.

(c) Dans le centre de masse, le quadrivecteur énergie-impulsion prend la forme $P_{\text{total}}^i = (E_{\text{total}}/c, \vec{0})$. Mais la masse totale invariante ne change pas en fonction du référentiel, autrement dit

$$2E_{\bar{p}} m_p = |P_{\text{total}}^i|^2 = |(E_{\text{total}}/c, \vec{0})|^2 = E_{\text{total}}^2/c^2$$

Comme on se retrouve dans une situation où l'impulsion totale est nulle, comme pour la première question, on trouve à nouveau que les deux photons sont émis selon le même axe mais dans des sens opposés, et que les deux photons ont la même énergie.

1. C'est la correction relativiste au centre de masse usuel. On voit que c'est en réalité plutôt un centre d'énergie

On note cette énergie E_0, de sorte à ce que le quadrivecteur énergie-impulsion prenne la forme

$$P^i_{\text{total}} = (2E_0/c, \vec{0})$$

En comparant les différentes expressions de P^i_{total}, on voit

$$2E_0/c = E_{\text{total}}/c = \sqrt{2E_{\bar{p}}m_p}$$

Donc

$$E_0 = \sqrt{\frac{E_{\bar{p}}m_pc^2}{2}}$$

(d) Pour passer du référentiel du laboratoire au référentiel du centre de masse de l'expérience, il nous a fallu booster le référentiel pour annuler l'impulsion totale

$$(m_pc + E_{\text{p}}c^{-1},\ \bar{p},\ 0,\ 0) \longrightarrow (2E_0/c, \vec{0})$$

On note $\beta_{L\to CM}$ et $\gamma_{L\to CM}$ les facteurs associés à ce boost, avec

$$\gamma_{L\to CM} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2_{L\to CM}}}$$

On voit en regardant la deuxième composante

$$0 = \gamma_{L\to CM}(\bar{p} + \beta_{L\to CM}(m_pc + E_{\text{p}}c^{-1}))$$

Soit

$$\beta_{L\to CM} = -\frac{\bar{p}}{m_pc + E_{\text{p}}c^{-1}}$$

La transformation inverse, pour passer du référentiel du centre de masse au référentiel du laboratoire, correspond à un boost de vitesse opposée, donc avec

$$\gamma_{CM\to L} = \gamma_{L\to CM}$$
$$\beta_{CM\to L} = -\beta_{L\to CM}$$

On veut transformer le quadrivecteur énergie-impulsion des deux photons pour les passer dans le référentiel du laboratoire. On a vu que de manière générale, un photon a une masse nulle et donc

$$E^2/c^2 - p^2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad p = E/c$$

Dans notre cas, cela veut dire que le quadrivecteur énergie-impulsion des photons dans le référentiel du centre de masse prend la forme

$$P^i_{\pm} = (E_0/c,\ \pm E_0/c,\ 0,\ 0)$$

Avec P^i_+ le quadrivecteur du photon allant dans le même sens que l'antiproton, et P^i_- celui du photon allant dans le sens opposé. Dans le référentiel du laboratoire, l'énergie des photons prend la forme

$$E_{\pm}/c = \gamma_{CM\to L}(E_0/c \mp \beta_{CM\to L}E_0/c) \tag{6}$$

Soit

$$E_{\pm} = \gamma_{L\to CM}(1 \mp \beta_{CM\to L})E_0 \tag{7}$$

Où les expressions explicites de $\gamma_{L\to CM}$, $\beta_{CM\to L}$ et E_0 ont été données précédemment. On rappelle que $\beta_{CM\to L} < 0$, et donc que $E_+ > E_0 > E_-$. Le photon allant dans le même sens que l'antiproton a plus d'énergie que celui allant dans le sens opposé.

(e) On utilise à nouveau

$$\lambda = \frac{hc}{E}$$

Et on note $\lambda_0 = hc/E_0$ la longueur d'onde des deux photons dans le référentiel du centre de masse. Le photon allant dans le sens de l'antiproton a pour longueur d'onde

$$\lambda_+ = \frac{hc}{\gamma_{L\to CM}(1-\beta_{CM\to L})E_0} = \frac{\sqrt{1-\beta_{CM\to L}^2}}{1-\beta_{CM\to L}}\lambda_0 = \sqrt{\frac{1+\beta_{CM\to L}}{1-\beta_{CM\to L}}}\lambda_0$$

Tandis que celui allant dans le sens opposé a pour longueur d'onde

$$\lambda_- = \frac{hc}{\gamma_{L\to CM}(1+\beta_{CM\to L})E_0} = \frac{\sqrt{1-\beta_{CM\to L}^2}}{1+\beta_{CM\to L}}\lambda_0 = \sqrt{\frac{1-\beta_{CM\to L}}{1+\beta_{CM\to L}}}\lambda_0$$

On reconnaît la formule pour l'effet Doppler relativiste. En se rappellant que $\beta_{CM\to L}$ est négatif, on voit que le photon allant dans le sens de l'antiproton a une longueur d'onde plus courte que celle de l'autre photon. Il a été décalé vers le bleu, alors que l'autre a été décalé vers le rouge.

Exercice 17 : Désintégration de neutrons

1. On se place dans le référentiel du neutron. Le système est fermé et avant désintégration, le système n'est constitué que du neutron au repos. On a donc le quadrivecteur énergie-impulsion total qui vaut

$$P^i_{\text{total}} = (m_n c, \vec{0})$$

Après désintégration, on note P^i_p, P^i_e et $P^i_{\bar{\nu}}$ les quadrivecteurs énergie-impulsion du proton, de l'électron et de l'anti-neutrino. On décompose aussi ces quadrivecteurs de manière générale en $P^i = (E, \vec{p})$.Par conservation de P^i_{total}, on a

$$E_p + E_e + E_{\bar{\nu}} = m_n c^2 \quad \text{et} \quad \vec{p}_p + \vec{p}_e + \vec{p}_{\bar{\nu}} = \vec{0}$$

Comme on s'intéresse au mouvement de l'électron, on peut regrouper les quadrivecteurs du proton et de l'antineutrino ensemble

$$P^i_{p+\bar{\nu}} = P^i_p + P^i_{\bar{\nu}}$$
$$E_e + E_{p+\bar{\nu}} = m_n c^2 \quad \text{et} \quad \vec{p}_e + \vec{p}_{p+\bar{\nu}} = \vec{0}$$

En particulier, on a

$$E^2_{p+\bar{\nu}}c^{-2} - m^2_{p+\bar{\nu}}c^2 = p^2_{p+\bar{\nu}} = p_e^2 = E_e^2 c^{-2} - m_e^2 c^2$$

Donc

$$(m^2_{p+\bar{\nu}} - m_e^2)c^2 = E^2_{p+\bar{\nu}}c^{-2} - E_e^2 c^{-2} = \frac{1}{c^2}(E_{p+\bar{\nu}} - E_e)(E_{p+\bar{\nu}} + E_e) = (E_{p+\bar{\nu}} - E_e)m_n$$

Et

$$\frac{c^2}{m_n}(m^2_{p+\bar{\nu}} - m_e^2) = m_n c^2 - 2E_e$$

Donc

$$E_e = \frac{c^2}{2m_n}(m_e^2 + m_n^2 - m^2_{p+\bar{\nu}})$$

Dans cette expression, m_e et m_n sont des constantes donc la seule chose qui peut changer est $m_{p+\bar{\nu}}$, la masse totale du système constitué du proton et de l'anti-neutrino. Pour maximiser l'énergie de l'électron, on veut minimiser cette masse totale. Comme c'est une masse, c'est la longueur d'un quadrivecteur, elle ne change pas en fonction du référentiel et on peut se placer dans le référentiel du centre de masse du système proton-anti-neutrino. Dans ce référentiel, la quantité de mouvement totale est nulle et donc $m_{p+\bar{\nu}}$ est égal à la somme des énergies du proton et de l'anti-neutrino dans ce référentiel, à un facteur c près. On veut donc minimiser l'énergie du proton et de l'antineutrino dans le référentiel de leur centre de masse, minimum atteint quand ils sont tous les deux au repos dans ce référentiel. On en conclut que $m_{p+\bar{\nu}}$ est minimal quand le proton et l'anti-neutrino sont au repos dans leur centre de masse, donc quand ils vont à la même vitesse. Dans ce cas,

$$m_{p+\bar{\nu},\text{min}}c = E_{p+\bar{\nu},CM}/c = m_p c + m_{\bar{\nu}} c$$

Et l'énergie maximale que peut avoir l'électron est

$$E_{e,\text{max}} = \frac{c^2}{2m_n}(m_e^2 + m_n^2 - (m_p + m_{\bar{\nu}})^2) \simeq \frac{c^2}{2m_n}(m_e^2 + m_n^2 - m_p^2)$$

En insérant les valeurs données, on obtient

$$E_{e,\text{max}} = 1,29 \text{ MeV} \tag{8}$$

2. On a vu que l'électron atteint son énergie maximale quand l'anti-neutrino et le proton vont à la même vitesse, qui est aussi la vitesse de leur centre de masse. Or de manière générale, on a

$$E = \gamma mc^2 \quad \text{donc} \quad \frac{Ev}{c^2} = \gamma mv \quad \text{donc} \quad v = \frac{pc^2}{E}$$

En appliquant cette formule au système $p + \bar{\nu}$, on a

$$v_{\bar{\nu}} = v_{p+\bar{\nu}} = \frac{p_{p+\bar{\nu}}c^2}{E_{p+\bar{\nu}}}$$

Mais par la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total écrite plus haut, on peut transformer cette équation en

$$v_{\bar{\nu}} = \frac{p_e c^2}{m_n c^2 - E_{e,\text{max}}}$$

Par ailleurs, on a $p_e = \sqrt{E_{e,\text{max}}^2 c^{-2} - m_e^2 c^2}$, et donc la vitesse de l'anti-neutrino est donnée par

$$v_{\bar{\nu}} = \frac{c\sqrt{E_{e,\text{max}}^2 - m_e^2 c^4}}{m_n c^2 - E_{e,\text{max}}}$$

Ayant déjà calculé explicitement $E_{e,\text{max}}$, on peut donner la valeur de la vitesse de l'anti-neutrino

$$v_{\bar{\nu}} = 1,27 \times 10^{-3}\ c = 3,82 \times 10^5 \text{ m.s}^{-1}$$